

# Compendio de resultados de investigación aplicada en la ingeniería

Universidad Autónoma de Coahuila



**Coordinadores:**  
**Vanesa Avalos Gaytán**  
**Yajaira Cardona Valdés**  
**Irma Delia García Calvillo**  
**Rina Betzabeth Ojeda Castañeda**

**FACULTAD DE**  
**SISTEMAS**  
ESTAMOS INNOVANDO

Compendio de resultados de investigación aplicada en la Ingeniería.

© Vanesa Avalos Gaytán

© Yajaira Cardona Valdés

© Irma Delia García Calvillo

© Rina Betzabeth Ojeda Castañeda

© Universidad Autónoma de Coahuila

© Coordinación General de Estudios de Posgrado e Investigación

ISBN 978-607-506-281-5



CGEPI/DC/003/17  
Febrero 28, 2017

### A QUIEN CORRESPONDA PRESENTE.-

Por medio de la presente se hace **CONSTAR** que el libro "Compendio de Resultados de Investigación Aplicada en la Ingeniería" con número de ISBN 978-607-506-281-5 publicado por la Universidad Autónoma de Coahuila, con fecha 18 de enero de 2017, cuenta con el aval de dos dictámenes Aprobados realizados por académicos externos a la UAdeC de reconocido prestigio, según consta en los archivos del Comité Editorial de esta Universidad. El libro ha sido coordinado por la Dra. Vanesa Avalos Gaytán; Dra. Yajaira Cardona Valdés, Dra. Irma Delia García Calvillo, Dra. Rina Ojeda Castañeda, catedráticas de esta Institución.

Se extiende la presente a solicitud de las interesadas para el uso y fines legales que a ellas convengan a los veinte días del mes de febrero de dos mil diecisiete.

**ATENTAMENTE**  
"EN EL BIEN FINCAMOS EL SABER"

  
**DR. JESÚS ACEVEDO ALEMÁN**  
SUBCOORDINADOR DE INVESTIGACION GENERAL DE ESTUDIOS  
DE POSTGRADO E INVESTIGACION



# **Características estructurales de redes dinámicas: nodos de fases similares vs nodos de fases diferentes**

**Vanesa Avalos Gaytán**

Centro de Investigación en Matemáticas Aplicadas, Universidad Autónoma de Coahuila  
*vanesaavalos@uadec.edu.mx*

**Juan Antonio Almendral Sánchez**

Universidad Rey Juan Carlos, España  
*juan.almendral@urjc.es*

**Irma Delia García Calvillo**

Centro de Investigación en Matemáticas Aplicadas, Universidad Autónoma de Coahuila  
*irma.garcia@uadec.edu.mx*

**Liliana López Aguilar**

Facultad de Sistemas, Universidad Autónoma de Coahuila  
*liliana\_lopez@uadec.edu.mx*

## **Resumen**

En este trabajo se presenta una comparación de las medidas de sincronización y propiedades estructurales de redes dinámicas en las cuales los enlaces evolucionan de acuerdo a una regla, pero que con un simple cambio se pueden generar redes con propiedades muy distintas.

*Palabras clave:* Redes complejas; Sincronización; propiedades estructurales.

## **1. Introducción**

Un sistema es un conjunto de elementos relacionados entre sí para lograr un fin común. A nuestro alrededor podemos encontrar una gran cantidad de sistemas, tanto naturales como artificiales, que podemos clasificar de forma básica en cuatro categorías: triviales, simples, complicados y complejos (Chialvo, 2004).

Aquí nos interesamos en aquellos catalogados como complejos debido a la gran cantidad de elementos que los conforman y a la dinámica no lineal que presentan tanto los elementos como las

interacciones entre los elementos. Es a partir de esa complejidad en las interacciones y en los elementos de donde surgen las llamadas *propiedades emergentes*, las cuales no pueden ser explicadas a partir de las propiedades de los elementos aislados. De hecho, no es raro que a partir de las conductas simples de las partes que conforman un sistema complejo, se observen propiedades o procesos extremadamente complejos en el conjunto que no son reducibles al comportamiento de sus partes constituyentes. Las propiedades emergentes *son el producto del conjunto de las relaciones entre las partes que conforman un sistema*. Estas propiedades están basadas en conductas simples de los elementos.

Por ejemplo, en las colonias de hormigas se observan conductas emergentes y, sin embargo, los elementos individuales (hormigas) del sistema sólo prestan atención a sus vecinos inmediatos, no están recibiendo órdenes de un agente central, cada hormiga actúa localmente, pero todas ellas producen un comportamiento global coherente y complejo (M. Uhrmacher y Weyns, 2009).

Las propiedades que presenta el hormiguero de una colonia de hormigas comparadas con las de una ciudad pueden parecer sistemas complejos completamente diferentes. Las ciudades como los hormigueros son organismos de un nivel superior, en el primer caso los humanos son mucho más inteligentes y reflexivos que las hormigas. Tomamos decisiones conscientemente y a su vez también contribuimos a un macrodesarrollo que casi no tenemos modo de abarcar, a pesar de nuestro avanzado lóbulo frontal. El macrodesarrollo pertenece al organismo de la ciudad en sí que crece, evoluciona y aprende en un ciclo de mil años, mientras se produce una sucesión de decenas de generaciones humanas (Johnson, 2001).

Otro ejemplo es el cerebro de cualquier animal. Alan L. Hodgkin y Andrew Huxley recibieron el premio Nobel en 1963 por un modelo, propuesto en 1952, que describía las corrientes iónicas que provocan el inicio y propagación de los potenciales de acción en una neurona de calamar. Así, el comportamiento de una neurona aislada es bien conocido. Sin embargo, este conocimiento no es suficiente para comprender los fenómenos emergentes observados en cualquier cerebro, como son la memoria o la percepción de un color o sonido. Este hecho se suele resumir con la frase “El total es más que la suma de las partes”.

Los sistemas complicados también están formados por muchas partes y en éstos basta con saber cómo funciona cada una de las partes que los conforman para entender el funcionamiento total del sistema, por ejemplo un avión, en el cual un especialista (mecánico de aviación) conoce muy bien el funcionamiento de éste y la utilidad de cada una de las piezas que lo componen.

En cambio, en un sistema complejo hay más información que la que proporciona cada parte independiente. Por eso para describir un sistema complejo no sólo hace falta conocer el funcionamiento de las partes, sino que también hace falta conocer cómo se relacionan las partes entre sí. Volviendo al ejemplo de las colonias de hormigas, en éste hace falta conocer las conductas emergentes — que son el producto del conjunto de las relaciones entre las partes — para entender el funcionamiento total del sistema.

Los sistemas adaptativos complejos son un tipo especial de sistemas que son complejos en el sentido de que son diversos y conformados por múltiples elementos interconectados y son adaptativos porque tienen la capacidad de cambiar y aprender del pasado.

Los sistemas simples se caracterizan por tener una menor cantidad de elementos interactuando, a diferencia de los sistemas complicados y los complejos, y las interacciones entre sus elementos y su comportamiento son no lineales, como por ejemplo los sistemas caóticos. Note que aquí *simple* no implica que tengan un comportamiento sencillo.

En los sistemas triviales también se tiene una cantidad menor de elementos y se caracterizan por la linealidad que presentan en las interacciones entre sus elementos y su comportamiento.

En un sistema complejo se pueden observar diferentes procesos emergentes, entre ellos uno de los más interesantes y que más atención recibe de la comunidad científica es la sincronización. *Sincronización* es el nombre que recibe el comportamiento estable en el tiempo en el que la dinámica de todos los elementos de un sistema es la misma —este comportamiento se debe al acoplamiento entre los elementos —.

En la naturaleza existen muchos ejemplos de sincronización, y en algunos casos son verdaderos espectáculos. Por ejemplo, el movimiento de miles de peces en un banco, las parvadas de aves, los grupos de luciérnagas que sincronizan la emisión de luz durante el apareamiento, las células musculares en el corazón latiendo al mismo tiempo, o el público de un concierto cuando todos aplauden al unísono para convencer al artista de volver actuar (Strogatz, 2003).

Para lograr llegar a la sincronización deben de combinarse en un balance sutil varios factores, siendo los más destacados las interacciones entre los elementos del grupo y las de cada individuo con el medio ambiente que se encuentra. Aunque este balance ha sido estudiado mediante varias herramientas, el aquí presentado es el más moderno y el que más resultados ha conseguido. El enfoque para abordar este tipo de problemas es la teoría de redes complejas. Su éxito reside en que su esquema teórico incluye herramientas de la teoría de sistemas dinámicos, que sirven para tratar con sistemas no lineales, y de la teoría de grafos, adecuada para tratar muchos elementos que interaccionan de forma no trivial.

### **1.1 Antecedentes del problema propuesto**

En el trabajo de Avalos-Gaytan et al. (2012) se estudió el problema de integración/segregación desde el punto de vista de las redes complejas, considerando que la topología de la red no es estática; sino que existe un mecanismo adaptativo que está actuando sobre los enlaces de una red. El estudio fue realizado con los objetivos de I) identificar bajo qué condiciones ocurre la sincronización en redes y II) qué propiedades estructurales están presentes en la topología de la red cuando ocurre la sincronización.

Para cumplir los objetivos los autores propusieron un modelo dinámico con el cual se modela la evolución en el tiempo tanto de la conexión entre cada par de elementos (nodos) como la evolución de cada uno de los elementos en el sistema. Su objetivo principal fue desarrollar un algoritmo de formación topológica con sincronización eficiente, el cual está basado en la interrelación entre las propiedades estructurales, locales y globales, y las propiedades dinámicas (sincronización global y sincronización local) de un sistema.

El modelo que propusieron es un modelo adaptativo para sincronización en redes: en el cual consideraron medidas para sincronización a nivel local y global (propiedades dinámicas), así como las propiedades estructurales tales como: el grado promedio, el grado promedio de los vecinos, la modularidad y la asortatividad. En su trabajo, Avalos-Gaytan et al. (2012) lograron comprobar por medio de diferentes formas que los resultados obtenidos son novedosos, ya que una de las características importantes de su algoritmo para sincronización es que no imponen de ninguna forma la estructura de las redes.

En su modelo se proponen dos funciones para la evolución de un sistema, I) con una se modela la evolución en el tiempo (dinámica) del comportamiento de las conexiones entre pares de elementos en un sistema; II) con la otra función se modela la correlación entre cada par de elementos en el sistema.

Con la función que modela la dinámica de la evolución de los enlaces (I) se evita el hecho de tener que definir una topología de red inicial y en su lugar se tiene un modelo con el cual se genera la topología más adecuada, así, se optimiza la topología de la red para que la sincronización sea más fácil.

Avalos-Gaytán et al. (2012) encontraron que la formación de grupos en una red, que es una característica global, surge de manera natural en una red al considerar que los enlaces están evolucionando. También observaron que en ausencia de la sincronización global, prevalece un alto grado de sincronización local. Con sus resultados experimentales mostraron que el modelo propuesto es adecuado para estudiar la sincronización en conjunto con la formación estructural (formación de grupos), debido a la naturaleza de los enlaces.

Para hacer la caracterización de la topología estructural de las redes resultantes se basaron en características como la medida de asortatividad y la medida de modularidad, con esta caracterización observaron que la sincronización y las propiedades estructurales pueden afectarse mutuamente. En su trabajo mencionan que esto es de interés porque en la literatura existente el estudio de sincronización es bajo topologías (estructuras) de red pre-impuestas, y eso no es de mucho interés ya que en la vida real los sistemas naturales no tienen una formación de red pre-impuesta.



Dentro de las características estructurales también cuantificaron el coeficiente de agrupamiento – clustering– el cual mide el grado en que los nodos de una red tienden a agruparse. Mencionan que esta medida se consideró porque la literatura sugiere que en la mayoría de las redes del mundo real y en particular en las redes sociales, los nodos tienden a crear grupos muy unidos caracterizados por una densidad relativamente alta entre los vínculos de conexión (Holland y Leinhardt, 1971, Watts y Strogatz, 1998).

La asortatividad también es una característica estructural de las redes, la cual es equivalente al coeficiente de correlación de Pearson, con la diferencia de que en las redes éste se mide entre el grado de un nodo y el grado medio de sus vecinos. Si el valor del coeficiente es cercano a uno significa que los nodos de grado alto tienden a estar conectados con otros nodos de grado alto; y por el contrario, cuando el coeficiente tiene un valor cercano a menos uno significa que nodos de grado alto tienden a conectarse con nodos de grado bajo; y cuando el valor del coeficiente está alrededor de cero, implica que los nodos se están conectando independientemente del grado que tengan.

La modularidad es una característica estructural de las redes, ésta mide qué tan separables en grupos es una red. Cuando la modularidad tiene un valor alto significa que las redes tienen una conexión densa entre los nodos que pertenecen a un mismo grupo, y en consecuencia, las conexiones entre los grupos que forma la red son escasas. Esta medida fue usada por Avalos-Gaytán et al. (2012) ya que en los métodos de optimización es la medida que frecuentemente se usa para detectar estructuras de redes, y ese era uno de sus objetivos.

## **2. Planteamiento del problema**

En este trabajo partimos del problema estudiado por Avalos-Gaytán et. al. y nos enfocamos en estudiar y analizar *qué pasa si en realidad lo que se refuerza son los enlaces que unen nodos que están haciendo lo opuesto, es decir, nodos que tiene comportamientos que no son similares, ¿qué resultados se pueden llegar a obtener?, ¿las redes resultantes seguirán siendo asortativas?, ¿seguirán presentando características estructurales como la modularidad?*

Para responder a esta cuestión se hace uso del algoritmo diseñado por Avalos-Gaytán et al. (2012),

el cual fue haciendo uso del método de integración de Runge-Kutta-Fehlberg, el cual es un algoritmo para la resolución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias, éste emplea un método de orden cuatro junto con un método de orden cinco que se sirve de todos los puntos del primero, en la literatura es llamado RKF45.

El objetivo principal fue identificar qué características estructurales presentan las redes al favorecer la conexión de nodos con comportamientos diferentes; para ello mediante experimentación computacional se cuantificaron los niveles de sincronización global y local (características dinámicas) que presentan las redes obtenidas, así como las características estructurales propias de las redes tales como: el grado promedio de los nodos, el grado promedio de los vecinos, la asortatividad y el coeficiente de agrupamiento. Finalmente se compararon los resultados de las características dinámicas y estructurales de las redes obtenidas para verificar la hipótesis planteada.

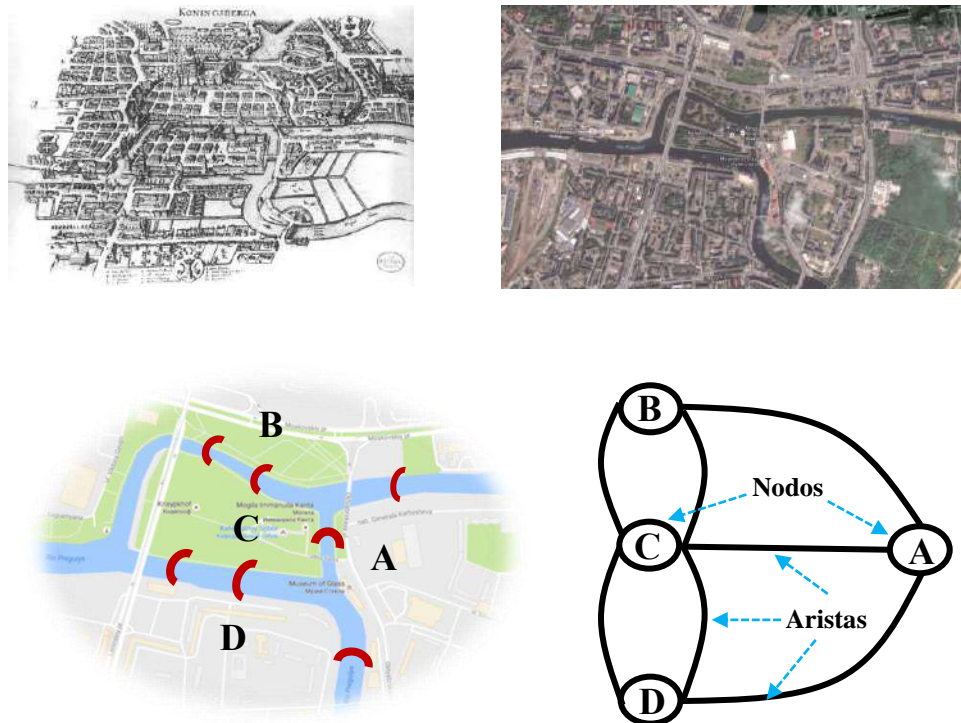
Este trabajo se realizó para verificar que, al evolucionar una red reforzando los pesos de los enlaces que unen nodos con fases diferentes y debilitando los pesos de los enlaces que unen nodos con fases iguales, las redes obtenidas son disasortativas, por lo cual las características estructurales que presentan deberían mostrar comportamientos diferentes (o incluso opuestos) a los resultados encontrados por Avalos-Gaytán et al. 2012.

### **3. Redes complejas**

El origen de la teoría de grafos radica en la resolución del problema de los siete puentes de Königsberg, es un célebre problema matemático resuelto por Leonhard Euler en 1736. Königsberg es el antiguo nombre de la ciudad rusa Kaliningrado, que durante el siglo XVIII formaba parte de Prusia Oriental como uno de los ducados del Reino de Prusia. Esta ciudad es atravesada por el río Pregolya, el cual se bifurca para rodear con sus brazos a la isla Kneiphof, dividiendo el terreno en cuatro regiones distintas, como se muestra en la Figura 1, y que entonces estaban unidas mediante siete puentes llamados puente del herrero, puente conector, puente verde, puente del mercado, puente de madera, puente alto y puente de la miel.

El problema de los siete puentes fue movido por la curiosidad, cuando los ciudadanos se interesaron en saber si era posible dar un paseo comenzando desde cualquiera de estas regiones, pasando por todos los puentes recorriendo una sola vez cada uno y regresando al mismo punto de partida.

Haciendo uso de la teoría de grafos, el mapa de las cuatro regiones en que está dividida la ciudad de Königsberg es representado como se observa en la Figura 1. Tan solo este cambio de perspectiva fue suficiente para que Euler demostrara que no era posible.



**Figura 1:** Arriba a la derecha se muestra Königsberg, 1736. A la izquierda vista Kaliningrado en la actualidad. Abajo a la izquierda: se indica dónde estaban los siete puentes en Königsberg en la época de Leonhard Euler; y abajo a la derecha se muestra el grafo correspondiente, A, B, C y D son los puntos del mapa representados por nodos y los puentes (marcados en rojo) son los enlaces en el grafo.

Fuentes: <https://sites.google.com/site/cienciaymuchomas/home/articulos/lospuentesdekoenigsberg>, <https://www.google.com.mx/maps/place/R%C3%ADo+Pregolya/@54.7054764,20.506502,1372m/data=!3m1!1e3!4m5!3m4!1s0x46e33da3a8bb532f:0xfc6b7d0077940ff6!8m2!3d54.6601302!4d21.08>

11111.

Tras la muerte de Euler, la teoría de grafos recibió muchas contribuciones de matemáticos como Hamilton, Kirchhoff y Cayley, que se centraron en estudiar las propiedades de los grafos regulares. De hecho, existen varios términos usados en grafos con el nombre de estos autores: camino hamiltoniano, grafo de Cayley (que representa la estructura de un grupo) o el teorema de Kirchhoff (sobre el número de árboles de expansión en un grafo).

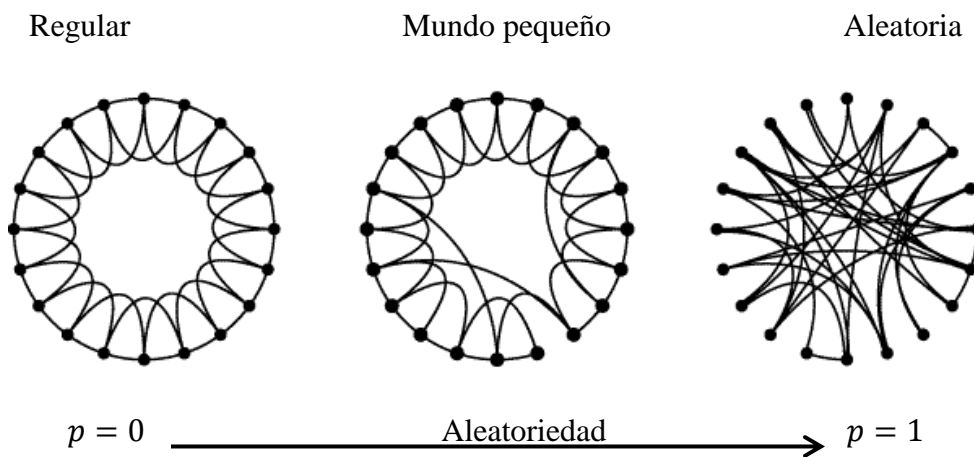
Otro problema muy destacado en la teoría de grafos es el problema de los cuatro colores, planteado por Francis Guthrie en 1852. Este problema consiste en responder la siguiente pregunta y cuya solución inicia por representar los países como nodos y las fronteras entre ellos con enlaces: ¿es posible colorear cualquier mapa de países usando solamente cuatro colores de tal manera que dos países vecinos nunca tengan el mismo color.

Con el estudio de grafos regulares se han resuelto muchos e interesantes problemas pero nadie se planteó la importante cuestión de cómo surgen las redes. Es decir, la aproximación a las redes era estática, nadie se preguntaba qué tipo de proceso dinámico genera una red. Solo en 1959 ese problema recibió el tratamiento adecuado de la mano del prolífico matemático Paul Erdős.

Paul Erdős y su colega, Alfréd Rényi, propusieron un modelo en el que los enlaces de una red aparecían con cierta probabilidad  $p$ . Hoy en día, la red resultante de ese proceso se conoce con el nombre de grafo aleatorio. El principal resultado que obtuvieron fue que existe una probabilidad crítica  $p_c \sim 1/N$ , por encima de la cual, la mayoría de los  $N$  nodos de la red están conectados. Nótese que el número de enlaces que hay que introducir para conectar  $N$  nodos es aproximadamente  $p_c N^2 \sim N$  (esto es, incluso para redes grandes, la probabilidad de enlazar dos nodos no necesita ser muy alta para conseguir enlazarlos a casi todos ellos). Un estudio detallado de las redes aleatorias muestra que estas redes tienen un coeficiente de agrupamiento pequeño y una distancia media pequeña, en tanto que las redes reales presentan un coeficiente de agrupamiento alto y una distancia media pequeña.

En 1998 Duncan Watts y Steven Strogatz presentaron un modelo simple acerca de la estructura de redes, intentando justificar la conectividad en el problema de la sincronización de los chirridos de

los grillos, los cuales muestran un alto grado de coordinación sobre distancias largas (como si los insectos estuvieran “invisiblemente” conectados). El trabajo de Watts y Strogatz (1998) no terminó en una nueva contribución a la teoría de sincronización, sino que dio inicio a la teoría moderna de redes complejas. Mostraron que a partir de una red regular la adición al azar de un pequeño número de enlaces reduce la distancia entre los nodos drásticamente; cf. Figura 2. Y como las redes regulares se caracterizan por tener un coeficiente de agrupamiento alto, conseguían simultáneamente una pequeña distancia media entre nodos, como sucede en las redes reales.



**Figura 2:** En el modelo Watts y Strogatz (1998), que transforma una red regular en una red aleatoria, aparece un tipo de red en la que la distancia entre los nodos se reduce manteniendo un coeficiente de agrupamiento alto. Fuente: Watts y Strogatz (1998).

Esta característica es conocida como efecto de “mundo pequeño” (en inglés: small world, SW) y fue reportada por primera vez en un experimento realizado por Travers y Milgram (1969), el cual consistió en examinar la longitud de ruta promedio para redes sociales de personas en Estados Unidos.

Muy pronto se descubrió que la naturaleza de muchos de los patrones de interacción que se observan en diversos escenarios, como en la Internet, la World Wide Web, redes de colaboración científica y

redes biológicas (Barabási y Albert, 1999; Barabási y Oltvai, 2004), presentaban propiedades que el modelo de Watts y Strogatz no era capaz de reproducir. La mayoría de estos escenarios mostraron que la distribución de los grados seguía una ley de potencias. Por tratarse de una distribución en la que la media no coincide con el máximo, no tiene una escala característica, y por ello han sido llamadas redes libres de escala. Los nodos más conectados, llamados centros en este trabajo (en inglés: hubs), están mucho más conectados de lo que los modelos de Erdős-Rényi o Watts-Strogatz pueden explicar.

Esta complejidad estructural provocó un gran desarrollo de trabajos, principalmente en la comunidad de los físicos, ya que este conjunto completamente nuevo de medidas, modelos, y técnicas que se necesitaban para estas estructuras topológicas ya existían en la física estadística.

En particular, los físicos Albert-László Barabási y Réka Albert propusieron un modelo (BA) que generaba la distribución de los grados observados en redes reales. Dicho modelo utilizaba el principio de “los ricos se enriquecen” (en inglés: rich get richer), que aplicado a las redes complejas reciben el nombre de enlace preferente. Este resultado dice que, para obtener una red libre de escala, es necesario que una red crezca añadiendo nuevos enlaces a nuevos nodos, de modo que los centros reciban los nuevos enlaces con mayor probabilidad (Barabási et al., 2004).

Sin embargo, se ha constado que las redes reales están organizadas en comunidades (estructura modular) pero en el modelo BA no. Como se explica en la introducción, es bien conocido que la modularidad es una característica esencial para comprender el funcionamiento de una red. Es importante destacar que hasta el modelo BA, las redes evolucionan sin tener en cuenta la dinámica interna de los nodos. Hasta que se incluye la dinámica es que la modularidad revela su importancia. Generar la modularidad por medio de argumentos topológicos es fácil, pero poco realista. Falta aún una teoría que genere esta modularidad teniendo en cuenta la misma dinámica para la que luego la modularidad será importante (Newman, 2006).

### **3.1 Sincronización**

El *fenómeno de sincronización* es uno de los fenómenos más atractivos de carácter cooperativo. Podemos observar procesos de sincronización en sistemas biológicos, químicos, físicos, y sociales.

Este fenómeno ha atraído el interés de muchos científicos durante siglos (Acebrón et al., 2005). Un ejemplo paradigmático es el parpadeo sincrónico de las luciérnagas que se observa en algunos bosques del sur de Asia. Por las noches multitudes de luciérnagas sobre los árboles comienzan a emitir destellos de luz. Inicialmente emiten la luz incoherentemente, pero después de un periodo corto de tiempo todas las luciérnagas destellan en armonía, creando un efecto visual sorprendente.

La relevancia de la sincronización ha sido frecuentemente enfatizada aunque ésta no siempre ha sido completamente entendida. En el caso de las luciérnagas los destellos sincrónicos pueden facilitar el cortejo entre machos y hembras. En muchos otros casos la función biológica de la sincronización está aún en discusión. Por otro lado la asincronía podría conducir a un desastre o extinción, con lo cual diferentes especies en la misma cadena trófica, pueden desarrollar diferentes ritmos circadianos para aumentar su probabilidad de supervivencia (Strogatz, 2003).

Las investigaciones sobre los fenómenos de sincronización se centran inevitablemente en determinar el mecanismo principal responsable de la conducta colectiva sincrónica entre los miembros de la población dada.

Para obtener una actividad global y coherente se requiere de la interacción de elementos oscilatorios. La actividad rítmica de cada elemento puede deberse al proceso de fuentes internas o externas, como estímulos o fuerzas externas. Incluso si los procesos internos responsables de la ritmicidad tienen diferentes orígenes físicos o bioquímicos, los cuales pueden ser muy complejos, se puede llegar a entender la esencia de la sincronización en términos de unos pocos principios básicos.

Los fenómenos de sincronización se han investigado desde los principios de la física. En el siglo XVI, Christian Huygens descubrió que dos relojes de péndulo colgados en la misma pared (c.f. Figura 2.11) sincronizaban perfectamente sus oscilaciones de fase.

Existen diferentes maneras de atacar este problema. Suponga que la actividad rítmica de cada elemento es descrita en términos de una variable física que evoluciona regularmente en el tiempo. Cuando cada variable alcanza un cierto umbral los elementos emiten una pulsación, la cual es transmitida a todos sus vecinos. Después, un mecanismo de reajuste inicializa el estado de este elemento, así un nuevo ciclo empieza otra vez. Esencialmente el comportamiento de cada elemento

es similar al de un oscilador. Asumiendo que el ritmo tiene un cierto periodo, cada que un ciclo se repite la posición en que un oscilador se encuentra en un instante de tiempo es llamada fase. El efecto del pulso emitido es alterar el estado actual de los vecinos modificando sus períodos, haciéndolos más largos o más cortos. Esta perturbación depende del estado actual de la fase del oscilador que recibe el impulso externo, es decir, que recibe la perturbación la cual implica un cambio de fase. El análisis del comportamiento colectivo del sistema puede realizarse bajo dos condiciones:

- i. el cambio de fase inducido por un impulso es independiente del número de impulsos que llegan entre impulsos del individuo afectado en un intervalo y
- ii. la llegada de un impulso afecta el período de un intervalo de tiempo actual, pero la memoria se pierde instantáneamente y el comportamiento en intervalos futuros no es afectado.

También se han estudiado los efectos de la sincronización considerando conjuntos de osciladores no lineales que se mueven en ciclos límite de atracción con amplitud constante. Éstos son los llamados osciladores de fase o ciclo límite. Acoplándolos débilmente se asegura que ninguna perturbación puede llevar a algún oscilador fuera del ciclo límite global, por lo que sólo se requiere de un grado de libertad para describir la evolución de la dinámica global del sistema.

El primer escenario de osciladores acoplados a pulso es quizás el más intuitivo, directo y más fácil de modelar. Sin embargo, la naturaleza discreta y no lineal de acoplamiento a pulsos da lugar a importantes complicaciones matemáticas. Tratar con pocos elementos acoplados a pulso puede ser sencillo en el marco de los sistemas dinámicos, mientras que la descripción es mucho más complicada para un gran número de dichos elementos.

Proponer un modelo para un segundo escenario del ciclo límite da un amplio margen para la investigación, lo cual nos obliga a considerar modelos con tiempo continuo e interacciones no lineales entre los osciladores y éstos son matemáticamente tratables.

Ahora se sabe que los modelos considerados con las propiedades anteriormente mencionadas (tiempo e interacciones) son excepcionales. Arthur T. Winfree (1967, 2001) observó que la sincronización se puede entender como un proceso de umbral. Cuando el acoplamiento entre los



osciladores es bastante fuerte, una fracción macroscópica de éstos se sincroniza con una frecuencia común. El modelo que propuso fue difícil de resolver, aunque se han encontrado una versión que tiene solución (Ariaratnam y Strogarz, 2001).

Al inicio, la atención se dedicó a la sincronización de sistemas periódicos, mientras que recientemente la búsqueda de sincronización se ha trasladado a los sistemas caóticos (Boccaletti et al., 2002). Cuando se acoplan elementos caóticos, pueden llevar a cabo diferentes fenómenos de sincronización completa o idéntica (Hirokazu y Yamada, 1983; Afraimovich et al., 1986; Pecora y Carroll, 1990), sincronización de fase (Rosenblum et al., 1996; Rosa et al., 1998), sincronización con retardo (Zaks et al., 1999), sincronización generalizada (Rulkov et al., 1995; Kocarev y Parlitz, 1996), sincronización con retardo intermitente (Rosenblum et al., 1996; Boccaletti et al., 2000), sincronización de fase imperfecta (Zaks et al., 1999) y “casi” sincronización (Fermat y Solís-Perales, 1999).

La sincronización completa o idéntica es la forma más simple de sincronización, consiste en un perfecto enganche de trayectorias de sistemas caóticos idénticos en el transcurso del tiempo. En cambio, la sincronización generalizada considera sistemas no idénticos en los que el comportamiento de unos es una función dada de la salida de otros (Rulkov et al., 1995; Kocarev y Parlitz, 1996). Los osciladores no idénticos acoplados pueden alcanzar el régimen de sincronización de fase, en el cual un bloque de las fases se produce sin una correlación importante asociada a las amplitudes (Rosenblum et al., 1996).

La sincronización con retraso implica el acotamiento asintótico de la diferencia entre la salida de un sistema para el tiempo  $t$  y la salida de otro desplazada en el tiempo por un lapso de tiempo  $T_{lag}$  (Rosenblum et al., 1997).

Este último fenómeno también puede ocurrir intermitentemente, dando lugar a la sincronización de retraso intermitente, donde los sistemas acoplados están la mayor parte del tiempo verificando la condición para la sincronización de retraso, pero persistentes ráfagas de comportamiento local asíncrono pueden afectar intermitentemente sus dinámicas (Rosenblum et al., 1997; Boccaletti y Valladares, 2000).

Análogamente, la sincronización de fase imperfecta es el régimen en el que las fases se deslizan intermitentemente dentro de un proceso de sincronización de fases (Zaks et al., 1999).

La continuación de estos trabajos ha investigado fenómenos de sincronización mediante pruebas en sistemas experimentales o naturales, para estudiar los mecanismos que conducen a la falta de sincronización (Barreto et al., 2000; Barreto y So, 2000), y para definir la unificación de criterios formales que podrían abarcar dentro del mismo marco los diferentes fenómenos de sincronización (Boccaletti et al., 2001).

### **3.2 Sincronización de redes complejas**

Durante más de una década hemos sido testigos de la evolución del campo de redes complejas, sobre todo desde el punto de vista estático, a pesar de que se han hecho numerosos intentos para caracterizar las propiedades dinámicas de las redes complejas. Una de las consecuencias dinámicas, conocida desde los orígenes de las redes complejas, es el fenómeno oscilante. El análisis de los procesos de sincronización se ha beneficiado del avance sobre el entendimiento de la topología de las redes complejas, y esto ha contribuido al entendimiento de sus propiedades emergentes (Boccaletti et al., 2006; Arenas et al., 2008).

Históricamente el estudio de la sincronización comenzó tratando de entender este proceso en el contexto de las redes neuronales biológicas. Los primeros estudios fueron realizados en osciladores acoplados mediante una red de interacciones regular. Más allá de las diferencias en la concepción actual de una red compleja, las topologías estudiadas por Niebur et al. (1991) pueden ser consideradas como una primera aproximación que revelan cómo la complejidad de la conectividad afecta a la sincronización. Niebur et al. (1991) utilizaron una red cuadrada geométrica para la construcción de tres sistemas con diferente conectividad: el primero fue conectividad con los cuatro vecinos más cercanos, el segundo conectividad de Gauss truncada en  $2\sigma$ , y el tercero es una conectividad aleatoria poco densa. Con sus resultados mostraron que sus enlaces de largo alcance conducen a fases “muy cercanas” entre los osciladores más rápida y robustamente que los enfoques de acoplamiento con los vecinos más cercanos o conexiones localmente densas. Estas observaciones

son la raíz de resultados recientes acerca de sincronización en redes complejas de osciladores (Arenas et al., 2008).

Winfree (1967) estudió la dinámica no lineal de una gran población de osciladores de ciclo límite acoplados débilmente con frecuencias naturales que fueron distribuidas en torno a algún valor medio de acuerdo a una determinada distribución de probabilidad. Lo más importante fue que consideró osciladores biológicos como osciladores de fase haciendo a un lado la amplitud; descubrió que una población de osciladores no idénticos puede presentar un notable fenómeno de cooperación (Arenas et al., 2008). Cuando la varianza de la distribución de las frecuencias es grande, los osciladores evolucionan cada uno de forma incoherente cerca de su frecuencia natural. Este comportamiento se mantiene cuando la varianza es reducida hasta cruzar un cierto umbral. Por debajo de este umbral los osciladores se empiezan a sincronizar espontáneamente (Winfree, 2001). Este modelo fue resuelto analíticamente por Ariaratnam y Strogatz (2001).

El trabajo de Winfree estimuló el campo de la sincronización colectiva y el uso de enfoques matemáticos para resolver el problema. Uno de estos enfoques considera un sistema formado por una gran población de osciladores débilmente acoplados, casi idénticos y con una interacción de ciclo límite. La fase de cada oscilador está influenciada por la fase de otros osciladores, y los cambios del ritmo de éstos son de acuerdo a cierta función (Acebrón et al., 2005; Strogatz, 2000).

A finales de los 80's Strogatz y Mirollo (1988) y más tarde Niebur et al. (1991), estudiaron la sincronización colectiva de osciladores de fase no lineales con frecuencias naturales aleatorias bajo una variedad de sistemas de acoplamiento en redes de dos dimensiones (Arenas et al., 2008). Posteriormente, se trabajó con osciladores cuya topología de interacciones eran redes libres de escala o redes de mundo pequeño (Nishikawa et al., 2003; Lago-Fernández et al., 2000; Gade y Hu, 2000; Jost y Joy, 2001; Hong et al., 2002; Kwon y Moon, 2002).

Más tarde se han concentrado principalmente en fenómenos de sincronización completa de sistemas no lineales idénticos, ya que éstos permiten un enfoque analítico. En los sistemas no lineales idénticos, un problema importante es evaluar las condiciones para la estabilidad del comportamiento síncrono de una topología de red cualquiera y para una configuración de acoplamiento genérico.

Esto se logra con un método muy potente llamado técnica de la función general de estabilidad (en inglés: master stability function) (Pecora y Carroll, 1998).

Como resultado de estos trabajos, ahora se sabe que una población de osciladores exhibe una dinámica análoga a una transición de fase en equilibrio. Cuando las frecuencias naturales de los osciladores son muy diferentes en comparación con la fuerza de acoplamiento, no son capaces de sincronizar sus fases y el sistema se comporta de forma incoherente. Sin embargo, si el acoplamiento es suficientemente fuerte, todos los osciladores alcanzan a sincronizarse.

La transición de asincronía a sincronía se realiza al alcanzar un determinado umbral. Al alcanzar el umbral algunos de los osciladores bloquean su fase relativa y se desarrollan grupos de nodos sincronizados dando lugar al inicio de la sincronización. Después de esto la población de osciladores se divide en un estado parcialmente sincronizado, formado por osciladores que ha bloqueado sus fases, y un grupo de nodos cuyas frecuencias naturales son demasiado diferentes como para ser parte del conjunto coherente (sincronizado). Finalmente, después de incrementar el acoplamiento poco a poco, el resto de los nodos son arrastrados en torno a la fase media del ritmo colectivo generado por toda la población y el sistema se establece en un estado completamente sincronizado (Arenas et al., 2008).

Actualmente existen resultados para tres tipos diferentes de osciladores: osciladores de ciclo límite *modelo de Kuramoto*, modelos acoplados a pulso y sistemas de mapas acoplados. En la siguiente sección se da una breve revisión de osciladores de ciclo límite, modelo de Kuramoto.

#### **4. Modelo de Kuramoto**

El modelo de Kuramoto, propuesto por Yoshiki Kuramoto (1975,1984), es un modelo matemático para describir fenómenos de sincronización. Específicamente modela el comportamiento de sistemas de muchos osciladores acoplados. En la forma más habitual del modelo, se considera que cada oscilador tiene su propia frecuencia natural (o intrínseca)  $\omega_m$  y cada uno está acoplado igualmente al resto de osciladores. Formalmente dada una población de  $N$  osciladores de fase acoplados, la fase

del  $m$ -ésimo oscilador, denotada por  $\theta_m$ , evoluciona en el tiempo de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$\dot{\theta}_m = \omega_m + \frac{\sigma}{N} \sum_{n=1}^N \sin(\theta_n - \theta_m), \quad (1)$$

donde  $\sigma$  es la fuerza de acoplamiento entre los osciladores, que comúnmente se considera constante. Las frecuencias son distribuidas de acuerdo a alguna función  $g(\omega)$ , la cual usualmente se asume como unimodal y simétrica respecto a su frecuencia media  $\bar{\omega}$ .

Cada oscilador intenta evolucionar independientemente con su propia frecuencia, mientras que la fuerza de acoplamiento  $\sigma$  tiende a sincronizar cada uno con los demás. El término  $1/N$  es un factor de normalización que se introduce por conveniencia de manera que los resultados teóricos que se explican en Avalos (2012), no dependan del tamaño de la red.

El modelo de Kuramoto fue motivado por el comportamiento de ciertos osciladores químicos y biológicos, y permite modelar la sincronización y la asincronía en grupos de osciladores acoplados. La limitada variedad de estados en los que el modelo se puede encontrar lo hace apropiado para el modelado de algunos sistemas de la neurociencia.

La dinámica colectiva de toda la población es medida por el parámetro de orden complejo macroscópico (Kuramoto, 1984):

$$r(t)e^{i\phi(t)} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{i\theta_n(t)}, \quad (2)$$

donde el módulo  $0 \leq |r(t)| \leq 1$  mide la coherencia de las fases de población y  $\phi(t)$  es la fase promedio. Los valores  $r \simeq 1$  y  $r \simeq 0$  describen los límites en los cuales los osciladores están acoplados en fase o se mueven en forma incoherente, respectivamente y  $\simeq$  representa las fluctuaciones de tamaño  $O(N^{\frac{1}{2}})$ .

Al multiplicar la Ecuación (2) por  $e^{-i\theta m}$  e igualando las partes imaginarias como explican Arenas et al. (2008), la Ecuación (1) se pueden escribir como:

$$\dot{\theta}_m = \Omega_m + \sigma r \sin(\phi - \theta_m), \quad m = 1, 2, \dots, N \quad (3)$$

la cual establece que cada oscilador interactúa con el resto sólo a través de las cantidades  $r$  y  $\phi$ . La cantidad  $r$  proporciona un ciclo de retroalimentación positiva para el ritmo colectivo del sistema: a medida que  $r$  se incrementa porque la población se vuelve más coherente, el acoplamiento entre los osciladores se fortalece y más de ellos acaban entrando en el grupo sincronizado.

A partir de la Ecuación (3) se puede establecer un valor de acoplamiento  $\sigma_c$  crítico por su influencia en la dinámica colectiva

$$\sigma_c = \frac{2}{\pi g(0)}. \quad (4)$$

La Ecuación (4) indica que por encima de  $\sigma_c$  el sistema siempre alcanza la sincronización, es decir, se tiene transición de no sincronización a sincronización.

## 5. Modelo adaptativo para sincronización en redes modulares

En esta sección se describe el modelo propuesto por Avalos-Gaytán (2012) para la formación topológica y sincronización de redes, el cual está basado en el modelo de Kuramoto descrito en la sección 4.

En las redes complejas distintos trabajos han buscado las condiciones necesarias para la aparición de la sincronización en la estructura de la escala local o en las propiedades macroscópicas. Sin embargo, no se ha logrado describir adecuadamente las características más importantes que los sistemas complejos presentan ya que frecuentemente exhiben una organización en módulos, es decir, están compuestas de subgrafos conectados entre sí con diferente conectividad interna y externa que forman comunidades. Esta organización es una limitante en la cual la estructura local

puede afectar en gran medida la dinámica, sin importar si se tratan redes homogéneas o heterogéneas.

Se ha reconocido que la organización modular, que presentan los diferentes sistemas naturales que son complejos, es fundamental para la manera en que un sistema complejo se desenvuelve, por lo que Avalos-Gaytán et al. se interesaron en estudiar cómo surge este rango intermedio, dado que en las redes reales se encuentra esta estructura modular, aunque hasta ahora no se sabe cómo es que surge. Además de estudiar la aparición de los módulos en sistemas complejos, con el modelo que propusieron se estudia la dinámica de sincronización, global y local, en redes ponderadas y no dirigidas a través de una versión modificada del modelo de Kuramoto.

Al igual que en el modelo de Kuramoto cada nodo (oscilador)  $v_m$ , con  $m = 1, 2, \dots, N$ , es caracterizado por una fase angular  $\theta_m \in [0, 2\pi]$  y una frecuencia natural  $\omega_m$  la cual puede tener diferentes condiciones iniciales. La fuerza de acoplamiento  $\sigma$  se considera constante para todos los nodos y se introduce el peso  $w_{mn}$  correspondiente al enlace entre el nodo  $v_m$  en el segundo término de la Ecuación (1).

La introducción del peso  $w_{mn}$  da lugar a una evolución en la cual los pesos tienden asintóticamente a cero ó tienden asintóticamente a uno. Cuando los pesos tienden asintóticamente a cero los enlaces son eliminados de la red, y cuando los pesos tienden a uno los enlaces están siendo reforzados y son estos enlaces los que acaban definiendo una matriz de adyacencia.

La dinámica de cada nodo evoluciona en el tiempo de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$\dot{\theta} = \omega_m + \frac{\sigma}{N} \sum_{n \in \mathcal{N}} w_{mn} \sin(\theta_n - \theta_m), \quad (5)$$

$$\dot{w}_{mn} = (p_{mn} - p_c)w_{mn}(1 - w_{mn}), \quad (6)$$

$$p_{mn} = \left| \cos\left(\frac{\theta_m - \theta_n}{2}\right) \right|. \quad (7)$$

Con

$$0 < \theta_n < 2\pi,$$

$$0 < w_{mn} < 1,$$

$$0 \leq p_{mn} \leq 1,$$

$$0 \leq p_{mn} - p_c \leq 1,$$

donde  $\mathcal{N}$  es el conjunto de nodos que son vecinos del nodo  $v_m$  y el último término en la Ecuación (5) es un acoplamiento difusivo, ya que contiene una diferencia de fases entre nodos, en el que  $(\sigma/N) \times w_{mn}$  es la intensidad del acoplamiento.

La evolución en el tiempo de los pesos  $w_{mn}$  es definida por la Ecuación (6) y es una ecuación que depende de una función  $p_{mn}$  con la cual estudiaron la evolución en el tiempo de pares de osciladores, esta última mide la correlación entre las dinámicas de los nodos  $v_m$  y  $v_n$ . El término  $w_{mn}$  es el peso entre los nodos  $v_m$  y  $v_n$ . El parámetro  $p_c$  es una correlación umbral que determina si un peso es reforzado (cuando  $p_{mn} > p_c$ ) o debilitado (cuando  $p_{mn} < p_c$ ).

En el contexto de la sincronización en redes complejas, se definen parámetros de orden local que son promediados sobre diferentes condiciones iniciales para estudiar esta evolución. Estos parámetros miden la correlación entre pares de osciladores y explican qué tan similares o diferentes son las fases de los osciladores. La Ecuación (7) mide correlación entre las dinámicas de cada par de nodos y es considerada como el promedio de las fases.

De esta forma, cuando dos nodos están sincronizados, es decir cuando  $\theta_m = \theta_n$ ,  $p_{mn}$  resulta en un valor de uno y si dos nodos tienen dinámicas anti-correladas, es decir cuando  $\theta_m = \theta_n + \pi$ , se obtiene un valor cero para  $p_{mn}$ ; y cuando  $\theta_m \neq \theta_n$ ,  $p_{mn}$  está entre cero y uno. Es importante observar que la ecuación (5) cambia para cada par de nodos, para cada instante de tiempo y está acotada entre cero y uno.

Observe que en la Ecuación (6) se requiere que los pesos estén entre cero y uno; ya que no consideran el caso de pesos negativos por el término de acoplamiento difusivo de la Ecuación (5), los pesos negativos no tienen sentido para este tipo de acoplamiento. Un acoplamiento difusivo



depende de la diferencia entre las variables dinámicas (en este caso las fases), de tal forma que las variables tienden a homogenizarse, es decir, aquellas que tienen un valor mayor tienden a “bajar” y las que tienen un valor menor tienden a “subir”. En un proceso antidifusivo sucedería lo contrario, tendería a “quitar” a las variables con valor bajo y a “dar” a las variables con valor alto, lo cual es un comportamiento inusual y por esta razón existen muy pocos trabajos en la literatura que consideran este caso. Por otra parte, considerar pesos positivos pero mayores que uno sí tiene sentido, pero en este caso siempre es posible renormalizarlos para garantizar que siempre sean menores que uno.

Con su modelo, Avalos-Gaytán et al. (2012) estudiaron las diferentes combinaciones para los parámetros  $p_c$  (correlación umbral) y  $\sigma$  (fuerza de acoplamiento) para diferentes condiciones iniciales de las frecuencias naturales  $\Omega_m$  y los pesos  $w_{mn}$ . Con lo anterior determinaron las condiciones iniciales óptimas para las cuales el modelo les permitió mostrar que efectivamente la sincronización en redes, las propiedades dinámicas y topológicas se influyen mutuamente y que ésta requiere de una estructura modular.

## 5.1 Observaciones

La Ecuación (5) determina la Ecuación (6), la cual a su vez condiciona la Ecuación (7) y ésta condiciona a su vez a la Ecuación (5). De este modo, no podemos considerar una de las ecuaciones por sí sola como  $\dot{w}_{mn}$  y determinar que sucede cuando  $p_{mn} - p_c$  esté en el intervalo (0,1), es decir, lo que suceda en una de las tres ecuaciones depende de lo que suceda con la ecuación sobre la que está condicionada.

En Avalos (2012) se explica cómo se pueden determinar los puntos fijos y estables para  $\dot{w}_{mn}$  y lo que sucede en los casos extremos, cuando  $p_c$  es cero ó uno.

Con este modelo se implementaron medidas de sincronización global y local, así como medidas que caracterizan la estructura topológica. Sus resultados serán expuestos junto a nuestros resultados para explicar la comparación entre ellos.

## 5.2 Metodología de la solución

### 5.2.1 Modelo adaptativo para comparar propiedades estructurales

El modelo que se propone en este trabajo es una sutil pero importante modificación al modelo presentado en la Sección 5. Este cambio consiste en modificar el signo en la Ecuación (6), con la cual se evolucionan los pesos, obteniendo

$$\dot{w}_{mn} = -(p_{mn} - p_c)w_{mn}(1 - w_{mn}), \quad (8)$$

Con este cambio se consigue hacer que el sistema de ecuaciones (5, 6 y 7) resulte en un sistema frustrado.

La causa de la frustración del sistema es la evolución de los enlaces en el sistema. Cuando se tiene  $(p_{mn} - p_c)$  en la Ecuación (6), simultáneamente el sistema presenta propiedades como sincronización local, modularidad y asortatividad, Avalos-Gaytán et al. (2012).

Al modificar el signo en  $(p_{mn} - p_c)$  se obtiene  $(p_c - p_{mn})$  y con ello en este caso la Ecuación (8) hace completamente lo contrario a la Ecuación (6), es decir, ahora se refuerzan los pesos de los enlaces que unen pares de nodos con fases diferentes y se debilitan los pesos de los enlaces que unen pares de nodos con fases similares.

Con este cambio de signo el modelo con el cual trabajamos en este proyecto queda de la siguiente forma

$$\dot{\theta} = \omega_m + \frac{\sigma}{N} \sum_{n \in \mathcal{N}} w_{mn} \sin(\theta_n - \theta_m), \quad (9)$$

$$\dot{w}_{mn} = (p_c - p_{mn})w_{mn}(1 - w_{mn}), \quad (10)$$

$$p_{mn} = \left| \cos\left(\frac{\theta_m - \theta_n}{2}\right) \right|. \quad (11)$$

Con

$$0 < \theta_n < 2\pi,$$

$$0 < w_{mn} < 1,$$

$$0 \leq p_{mn} \leq 1,$$

$$0 \leq p_{mn} - p_c \leq 1,$$

### 5.2.2 Medidas para el grado de sincronización

Para cuantificar el grado de sincronización se optó por los parámetros:  $R^G$  definido por Kuramoto, para medir la convergencia de todos los nodos a una dinámica común, para la sincronización global y  $R_m^L$  definido por Avalos-Gaytán et al. (2012). Para la sincronización local.

El grado de sincronización global se mide de la siguiente forma (Kuramoto, 1984; Arenas et al., 2006; Arenas y Díaz-Guilera, 2007)

$$R^G = \left\langle \left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j(t)} \right| \right\rangle_t = \left\langle \frac{1}{N} \sqrt{\left( \sum_{n=1}^N \cos(\theta_n(t)) \right)^2 + \left( \sum_{n=1}^N \sin(\theta_n(t)) \right)^2} \right\rangle_t, \quad (12)$$

donde  $\langle \cdot \rangle_t$  significa que es el promedio en el tiempo. Este parámetro ha demostrado dar buenos resultados cuantificando el grado de sincronización global, es por esta razón que se optó por aplicar este parámetro (Kuramoto, 1984; Boccaletti et al., 2002, 2006; Arenas et al., 2006, 2008; Acebrón et al., 2005; Strogatz y Mirollo, 1988).

En cuanto al grado de sincronización local  $R_m^L$  para medir la sincronización al nodo  $v_m$ , existen diferentes formas en que se puede cuantificar (Arenas et al. 2008, Restrepo et al. 2005). Dado que nosotros trabajamos con el modelo de Avalos-Gaytán et al. (2012) hemos considerado cuantificar el grado de sincronización local como ellos lo hacen ya que miden el nivel de sincronización local en cada instante de tiempo:

$$R_m^L = \left\langle \left| \frac{\sum_n^N w_{mn} e^{i\theta_n(t)}}{\sum_n^N w_{mn}} \right| \right\rangle_t \quad (13)$$

$$= \left\langle \frac{1}{\sum_{n=1}^N w_{mn}} \sqrt{\left( \sum_{n=1}^N w_{mn} \cos(\theta_n(t)) \right)^2 + \left( \sum_{n=1}^N w_{mn} \sin(\theta_n(t)) \right)^2} \right\rangle_t.$$

El nivel de sincronización local se cuantifica a nivel global y se definió como en Avalos et al. (2012):

$$R^L := \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N R_m^L. \quad (14)$$

Con este parámetro lo que se hace es medir la similitud de las dinámicas de un nodo con sus vecinos. Es importante observar que es posible que una red exhiba una pobre sincronización global pero un alto nivel de sincronización local.

### 5.2.3 Medidas de caracterización topológica

Dado que la Ecuación (8) —con la cual se evolucionan los pesos de los enlaces— es de carácter mono-estable, la matriz de la red final que se obtiene al evolucionar el conjunto de ecuaciones (8, 9 y 10) puede ser descrita mediante su matriz de adyacencia en la cual solo hay ceros y unos.

La representar la red final con la matriz adyacente permite poder usar medidas propias de las redes no ponderadas y no dirigidas para cuantificar ciertas características topológicas, estas medidas están bien definidas siempre y es algo que no sucede en el caso de las redes ponderadas

La *modularidad* es una característica estructural de las redes, mide qué tan separable en módulos o comunidades es una red. Las redes con alta modularidad tienen conexiones densas entre los nodos que están dentro de cada uno de los módulos, mientras que las conexiones entre los módulos son escasas. La modularidad se usa frecuentemente en los métodos de optimización para detectar estructuras de comunidades en redes. Recordemos que en este trabajo se favorece a los pesos de los enlaces que unen nodos con fases asimilares y se castiga a los pesos de los enlaces que unen nodos

con fases similares. Es por ello que en no esperamos que las redes resultantes presenten formación de módulos.

Una característica que sí cuantificamos y con la cual podemos corroborar el hecho de no esperar que las redes resultantes presenten módulos es la *asortatividad*  $\mathcal{A}$ , la cual es una característica estructural importante en las redes. Esta característica también es conocida como el coeficiente de correlación de Pearson entre el grado de un nodo y el grado medio de sus vecinos —la interpretación es muy similar—. Cuando este coeficiente toma valores cercanos a uno significa que los nodos de grado alto tienden a estar conectados con otros nodos de grado alto; y cuando toma valores cercanos a menos uno es porque los nodos de grado alto tienden a conectarse con nodos de grado bajo. Valores del coeficiente de asortatividad alrededor de cero implican que los nodos están conectados independientemente del grado que tengan.

Esta característica —asortatividad— se cuantifica con el cálculo del grado promedio de los vecinos de un nodo con grado  $k$  de la siguiente forma (Pastor-Satorras et al., 2001):

$$k_{nn}(k) := \sum_{k'} k' P(k'|k), \quad (15)$$

donde  $P(k'|k)$  es la probabilidad condicional para un nodo con grado  $k$  que tenga un vecino con grado  $k'$ . Si  $k_{nn}(k)$  es una función monótonamente creciente, entonces la red es asortativa. Así, esta segunda alternativa se puede calcular como:

$$k_{nn} = \frac{\sum_{m=1}^N k_m \cdot \sum_{m=1}^N \bar{k}_m^{v_m} - N \cdot \sum_{m=1}^N k_m \cdot \bar{k}_m^{v_m}}{(\sum_{m=1}^N k_m)^2 - N \cdot \sum_{m=1}^N k_m^2}, \quad (16)$$

donde  $k_m$  es el grado del nodo  $v_m$  y  $\bar{k}_m^{v_m}$  es el grado promedio de los vecinos del nodo  $v_m$ .

Se ha optado por trabajar con la Ecuación (16) porque esta forma de cuantificar el coeficiente de correlación en redes es más sencilla de implementar computacionalmente.

El *grado promedio*  $\bar{k}$  del nodo  $v_m$  se calcula como:

$$\bar{k} = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N k_m. \quad (17)$$

El *grado promedio de los vecinos*  $\bar{k}_m^{v_m}$  del nodo  $v_m$  se calcula como:

$$\bar{k}_m^{v_m} = \frac{1}{k_m} \sum_{n \in \mathcal{V}} k_n, \quad (18)$$

donde  $\mathcal{V}$  es el conjunto de vecinos del nodo  $v_m$  y  $k_n$  es el grado del nodo  $n$ . El promedio de la Ecuación (18) es:

$$\bar{k}^{\mathcal{V}} = \sum_{m=1}^N \bar{k}_m^{v_m}. \quad (19)$$

Duncan Watts y Steven Strogatz (1998) definen el *coeficiente de agrupamiento local*  $C_m$  del nodo  $v_m$  como:

$$C_m = \frac{2L}{k_m(k_m - 1)}, \quad (20)$$

donde  $L$  es el número de enlaces que conectan los  $k_m$  vecinos del nodo  $v_m$  y  $k_m(k_m - 1)/2$  es el número total de posibles enlaces entre los vecinos. Este coeficiente fue definido sólo para los nodos que tienen un grado mayor que uno y siempre es un número entre cero y uno. Cuando  $C_m = 1$  significa que todos los vecinos del nodo  $v_m$  se enlazan entre ellos, y cuando  $C_m = 0$  implica que no hay enlaces entre ellos. El *coeficiente de agrupamiento*  $\bar{C}$  es el promedio de todos los agrupamientos locales en la red, es decir

$$\bar{C}_l = \frac{\sum_{m=1}^N C_m}{N}. \quad (21)$$

Es medida cuantifica que tan conectado está un nodo con sus vecinos. Cuando dos nodos no están conectados directamente entre sí indica que existe una gran probabilidad de que estos nodos estén conectados a través de otros nodos.

## 6. Experimentación computacional

## 6.1 Diseño experimental

El modelo en el que nos basamos tiene dos parámetros que deben ser destacados: la correlación crítica  $p_c$  y la fuerza de acoplamiento  $\sigma$ . Para la evolución del modelo se considera una red con  $N$  nodos u osciladores, donde para cada uno se define: su fase inicial  $\theta_m^0$ , su frecuencia natural inicial  $\omega_m^0$  y un peso inicial  $w_{mn}^0$  para cada uno de los  $N(N - 1)/2$  enlaces; se tienen que inicializar esta cantidad de pesos ya que la red con la que se inicia la evolución de los pesos es una red completa. También se debe fijar la fuerza del acoplamiento  $\sigma$  y la correlación crítica  $p_c$ ; estos dos parámetros además de determinar la topología de la red final, también determinan la dinámica en el estado estable, es decir el comportamiento en las redes finales.

Los experimentos se han realizado con el objetivo de poder comparar los resultados con los obtenidos por Avalos (2012) y probar la hipótesis planteada, así que los experimentos se realizaron para diferentes valores de las condiciones iniciales.

En el modelo usado las frecuencias naturales determinan la rapidez con que los osciladores se mueven, por lo cual es conveniente que éstas no vayan ni muy rápido ni muy lento en comparación con la convergencia de los enlaces, ya que como explican Avalos (2012): si las frecuencias naturales van rápido la convergencia de los enlaces llega tarde; y por el contrario, si van lentas, la convergencia de los enlaces solo depende de las condiciones iniciales y no de su evolución. Ellos querían que aproximadamente en un ciclo de un oscilador (aproximadamente  $2\pi$ ), los enlaces se modificaran en función del estado de los nodos, pero que no fuera de forma ni muy lenta ni muy rápida.

En sus experimentos Avalos (2012) analizaron las zonas adecuadas en las que se deberían definir las condiciones iniciales de las frecuencias naturales y los pesos, con ello llegaron a estimar el tiempo característico de la dinámica de los enlaces y de los nodos. Determinaron que en torno a uno la dinámica de los pesos y los enlaces presentaban escalas de tiempo similares.

Como queremos que nuestros resultados sean comparables con los de Avalos et al. (2012) nos enfocamos a realizar la experimentación con las condiciones iniciales tal como lo hicieron ellos. Definieron 3 grupos de condiciones iniciales, de las cuales sólo una de ellas fue la que mostró

resultados interesantes, siendo este mismo el grupo de condiciones iniciales con el que experimentamos, concretamente.

Las condiciones iniciales para los pesos están en el intervalo (0,1), ya que como se mencionó antes, los enlaces tienden a cero o a uno, es decir a una matriz de adyacencia; aunque pueden ser inicializados en cualquier otro intervalo ya que siempre se pueden re-escalar. Las fases iniciales son siempre elegidas de forma aleatoria ya que éstas no son importantes en el estado final de la red:

$\theta_n$ : se inicializan aleatoriamente en el intervalo  $[0, 2\pi]$ .

Los pesos  $w_{mn}$  y las frecuencias naturales  $\omega_m$  son generados con una función de probabilidad uniforme continua en un intervalo determinado:

$w_{mn}$ : se inicializan aleatoriamente en el intervalo  $[0, 1]$ .

$\omega_m$ : se inicializan aleatoriamente en el intervalo  $[0.8, 1.2]$ .

Los valores para los parámetros  $p_c$  y  $\sigma$  que se usaron son:

$p_c = \{0.025, 0.050, 0.075, 0.100, 0.125, 0.150, 0.175, 0.200,$   
 $0.225, 0.250, 0.275, 0.300, 0.325, 0.350, 0.375, 0.400,$   
 $0.425, 0.450, 0.475, 0.500, 0.525, 0.550, 0.575, 0.600,$   
 $0.625, 0.650, 0.675, 0.700, 0.725, 0.750, 0.775, 0.800,$   
 $0.825, 0.850, 0.875, 0.900, 0.925, 0.950, 0.975, 1.00\}.$

El incremento en los valores de  $p_c$  puede ser tan pequeño como se quiera, pero es claro que para que el comportamiento de nuestros resultados sean comparables debemos usar los mismos valores que Avalos Gaytán et al. (2012). Además hacer una discretización más fina de los valores de  $p_c$  implica que la experimentación requerirá una gran cantidad de tiempo de cómputo.

Los valores de la fuerza de acoplamiento son:

$\sigma = \{0.20, 0.22, 0.24, 0.26, 0.30, 0.35, 0.40, 0.50, 0.60\}$

Para seleccionar estos valores, también realizaron un análisis detallado partiendo del cálculo numérico de forma aproximada para determinar el valor crítico de la fuerza de acoplamiento, siendo este  $\sigma_c \approx 0.26$ . Estos valores fueron seleccionados de forma tal que los valores de acoplamiento a la



izquierda de  $\sigma_c = 0.26$  no permitían obtener resultados de sincronización y valores de acoplamiento a la derecha de  $\sigma_c = 0.26$  si la permitían.

## 6.2 Implementación

La implementación para el modelo es usando el método de integración de Runge-Kutta-Fehlberg, el cual es un algoritmo de análisis numérico para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias, emplea un método de  $O(h^4)$  junto con un método de  $O(h^5)$ , este último se sirve de los puntos del primer método, por lo cual es conocido como RKF45. Se usó un algoritmo que fue implementado en el lenguaje de programación C usando Matlab (Archivos MEX), en el cual están programadas las ecuaciones del modelo en conjunto y las funciones de las diferentes medidas de sincronización y propiedades estructurales.

Sin importar el método de integración numérico que se aplique, el número de ecuaciones a integrar — $N$  en la ecuación de las fases y  $N(N - 1)/2$  en la ecuación que evoluciona los pesos— fue necesario usar un cluster informático de alto rendimiento, formado por diferentes procesadores Xeon Quad-core Clovertown con una velocidad de 2.33 GHz y 16 GB de memoria cada uno. Del total de núcleos con que cuenta el cluster se hizo uso de 100 de ellos para realizar los experimentos.

Por cada combinación de parámetros  $(p_c, \sigma)$  se han calculado 100 repeticiones tanto para las medidas de sincronización global y local como para las medidas de caracterización de la estructura topológica. Las repeticiones se calculan con el objetivo de evitar fluctuaciones estadísticas. Para cada una de estas 100 repeticiones, el sistema dinámico se evoluciona durante un tiempo transitorio hasta converger a un estado estable. Una vez que los enlaces han fijado su peso y las fases instantáneas se han sincronizado o no, se deja evolucionar el sistema durante cierto intervalo de tiempo para calcular las medidas y poder hacer el promedio de las 100 repeticiones. El tiempo transitorio dura 50, 000 unidades de tiempo y el intervalo de tiempo en el que se realizan las mediciones es de 50 unidades, las cuales deben compararse con las 5–7 unidades de tiempo que aproximadamente tardan los osciladores en completar un ciclo, (Avalos, 2012).

## 7. Resultados

Para hacer la comparación de las medidas, a la izquierda de las figuras se mostraran los resultados de Avalos-Gaytán et al. (2012), en donde usan  $\dot{w}_{mn} = (p_{mn} - p_c)w_{mn}(1 - w_{mn})$  (subfigura (a)), a la derecha mostraremos los resultados que se han obtenido con  $\dot{w}_{mn} = (p_c - p_{mn})w_{mn}(1 - w_{mn})$  (subfigura (b)).

Cada punto en las gráficas para cada valor de  $p_c$  representa el promedio obtenido de las 100 repeticiones realizadas para cada una de las medidas, a su vez cada uno de estos puntos está representado por un color y una marca específica; cada una de las curvas formada por los puntos de un color y marca específicos, representan cada uno de los valores de la fuerza de acoplamiento.

### 7.1 Grado del nivel de sincronización

En ambas medidas de sincronización es fácil observar las gráficas y darse cuenta que el comportamiento de los resultados obtenidos en este trabajo son completamente opuestos a los encontrados por Avalos-Gaytán et al. (2012), con lo cual podemos intuir, antes de pasar a las propiedades estructurales, que las propiedades estructurales también presentan un comportamiento muy diferente. Aún así, analizaremos y daremos algunas observaciones para cada una de las medias calculadas.

#### 7.1.1 Sincronización global

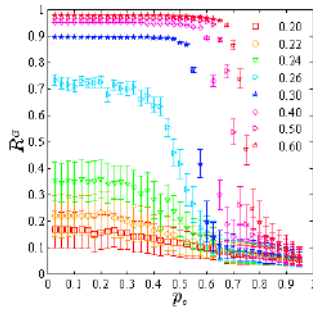
Observe en ambos casos de la Figura 3, que para valores de la fuerza de acoplamiento  $\sigma = 0.20, 0.22, 0.24$  la sincronización global no existe, sin embargo, para valores de la fuerza de acoplamiento a partir de 0.26 la sincronización global presenta un cambio notable; para este valor, en la Figura (3 a) se observa que el nivel de sincronización global decrece hasta que llegue a ser muy bajo, notando un establecimiento aproximadamente a partir de valores de la correlación umbral entre dos nodos mayor o igual a  $p_c=0.625$ . Para los mismos valores de  $\sigma = 0.20, 0.22, 0.24, 0.26$ , en la Figura (3 b) se observa un comportamiento contrario, antes de  $p_c=0.625$  se nota como no hay sincronización global, mostrando un ligero aumento a partir de ese valor. Particularmente para

$\sigma = 0.26$  el cambio es muy notable para valores a partir de  $p_c = 0.675$ , valor de correlación umbral a partir del cual se observa un crecimiento en el nivel de sincronización global, manteniéndose hasta el final. Aún cuando para  $\sigma = 0.26$  ya se observa una diferencia en el nivel de sincronización global, éste no es todavía lo suficientemente alto, pero si es el valor crítico a partir del cual, sin importar que valor tome  $\sigma$ , cualquier valor mayor que tomemos nos arrojará redes síncronas globalmente para valores de  $p_c \geq 0.675$ .

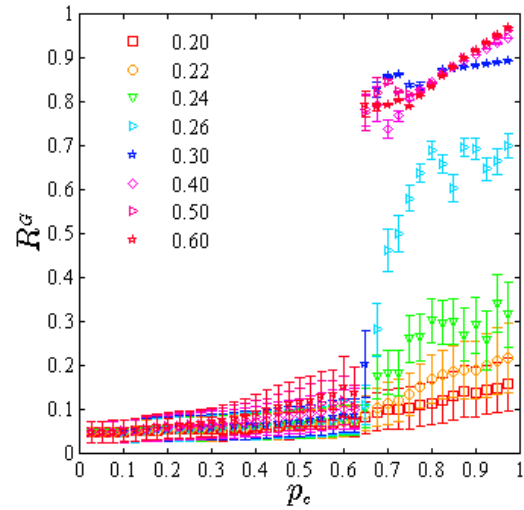
Es importante hacer notar que en el primer caso (Figura 3a) mientras mayor sea la correlación umbral entre dos fases de nodos (medida con que se permite decidir cuan parecidas son las fases de los nodos en cuestión) menor es el grado de sincronización global, sin importar de qué valor de fuerza de acoplamiento se esté hablando. En el segundo caso (Figura 3b) se observa que mientras mayor sea la correlación umbral entre las fases de dos nodos, mayor es el grado de sincronización global, y aquí sí es importante hacer notar que esto no pasa para todos los valores de la fuerza de acoplamiento, ya que a nosotros sólo nos interesan aquellos en donde el nivel de sincronización global es realmente notable, y esto sólo se observa para valor de  $\sigma = 0.26$  en adelante.

### **7.1.2 Sincronización local**

En los resultados de la sincronización local se tiene un comportamiento similar al de la sincronización global. En este caso vamos a hablar de los resultados partiendo el conjunto de los valores de correlación umbral de los valores de  $p_c$ ,  $p_c \leq 0.625$  y  $p_c > 0.625$ .



(3a)



(3b)

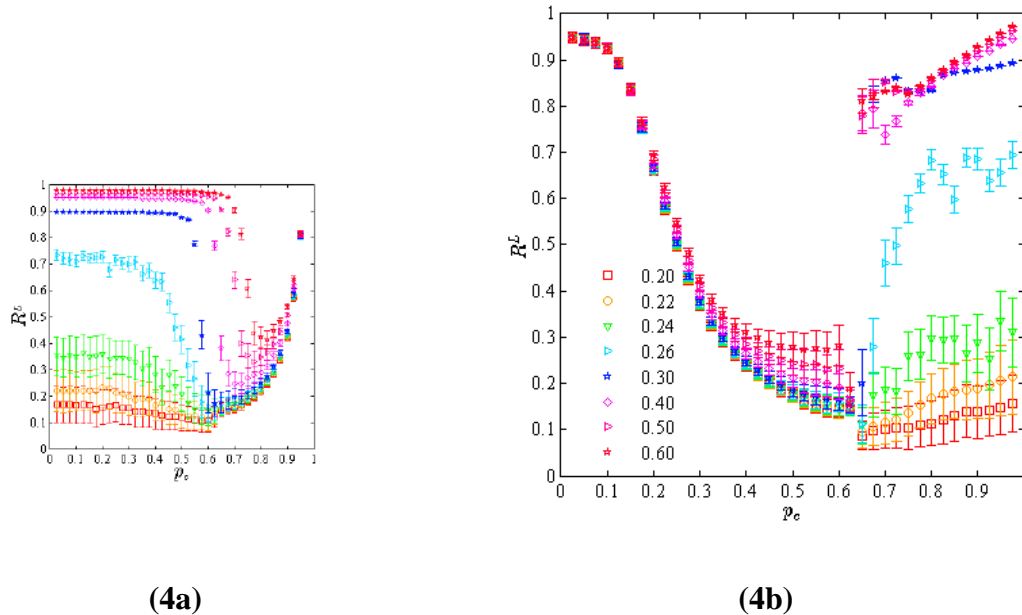
**Figura 3:** Resultados obtenidos para el grado de sincronización global para redes con pesos distribuidos uniformemente en el intervalo (0,1) y frecuencias naturales distribuidas uniformemente en el intervalo (0.8, 1.2). Fuente: Elaboración propia.

Observe en la Figura (4), que para cualquier valor de la fuerza de acoplamiento y para valores pequeños de  $p_c$  hasta 0.625, la sincronización local presenta un comportamiento decreciente, pasando rápidamente de un nivel alto de sincronización local a perderse, continuando con un promedio de poco o nulo (puede ser considerado así) nivel de sincronización local para valores de la fuerza de acoplamiento de 0.20, 0.22 y 0.24 para valores de  $p_c \geq 0.65$ ; en este caso vemos como  $\sigma = 0.26$  vuelve a hacer la diferencia en el nivel de sincronización, esto es porque este valor es aproximadamente el valor crítico de transición de sincronización en el modelo de Kuramoto, pues a partir de este valor los niveles de sincronización para cualquier valor de  $p_c \geq 0.65$  es alto, alcanzando valores hasta por encima de 0.95.

Observe que para todas las combinaciones entre  $p_c \geq 0.65$  y  $\sigma \geq 0.26$ , los resultados tanto de sincronización global como local son muy parecidos; en ambos casos la diferencia importante se da a partir de  $p_c = 0.65$ , note como para este valor y cualquier valor de la fuerza de acoplamiento el

nivel de sincronización se recupera llegando a alcanzar valores buenos para el nivel de sincronización.

Observe, que para las combinaciones entre  $0.625 < p_c \leq 0.975$  y  $\sigma = 0.24, 0.26, 0.30, 0.40, 0.50$  la sincronización global y local presentan comportamientos similares, en ambos casos es notable que para los valores de  $\sigma = 0.26, 0.30, 0.40, 0.50, 0.60$  las transición de la sincronización es una transición de primer orden.



**Figura 4:** Resultados obtenidos para el grado de sincronización local.

Fuente: Elaboración propia.

## 7.2 Propiedades topológicas o estructurales

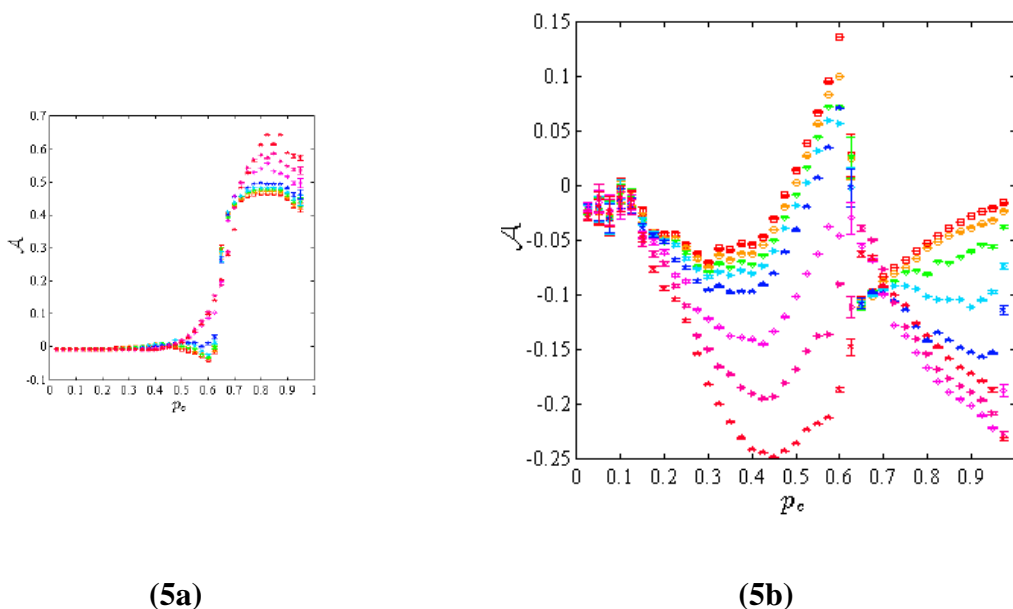
Las propiedades estructurales que se cuantificaron para ser comparadas son: asortatividad, grado promedio, grado promedio de los vecinos y coeficiente de agrupamiento.

### 7.2.1 Asortatividad

Como se mencionó anteriormente, la asortatividad es una medida para cuantificar la correlación en redes. En la Figura (5) se puede observar que los resultados obtenidos para la asortatividad están en

un rango de  $-0.25$  a  $0.15$ , con esto la conclusión es que las redes obtenidas no son asortativas para ningún par de valores  $(p_c, \sigma)$ . Recordemos que para decir que una red es asortativa esta medida debe tomar valores cercanos a uno. En la Figura (5a), que son los resultados obtenidos por Avalos-Gaytán et al. (2012), se observa que las redes que ellos obtuvieron sí son asortativas para un conjunto de pares de valores  $(p_c, \sigma)$ .

Comparando los resultados mostrados en la Figura 5, la hipótesis planteada en este trabajo se cumple, es decir, al evolucionar una red reforzando los pesos de los enlaces que unen nodos con fases diferentes y debilitando los pesos de los enlaces que unen nodos con fases iguales, las redes obtenidas son disasortativas, con ello desde aquí ya podemos intuir que las características estructurales que presentan serán diferentes (o incluso opuestas) a los resultados encontrados por Avalos- Gaytán et al. (2012).



**Figura 5:** Resultados obtenidos para la asortatividad.  
Fuente: Elaboración propia.

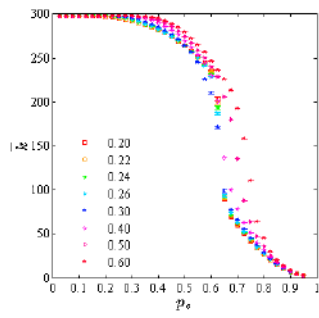
## 7.2.2 Grado promedio y grado promedio de los vecinos

En la Figura 6 se puede observar que en ambos casos, tanto el grado promedio como el grado promedio de los vecinos de los nodos tienen el mismo comportamiento. Al comparar las Figuras

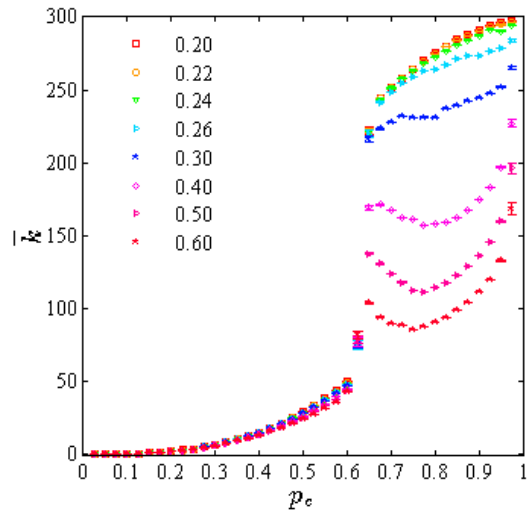
(6b) y (6d) con las Figuras (6a) y (6c), respectivamente, se puede observar claramente que los resultados que obtuvimos son muy distintos a los obtenidos por Avalos-Gaytán et al. (2012), note que en los resultados que obtuvimos, se observan dos conjuntos que presentan el mismo comportamiento. Para cualquier valor de  $\sigma$  combinado con valores de  $p_c \leq 0.6$  ambas medidas son crecientes alcanzando un grado promedio o grado promedio de los vecinos alrededor de 50. A partir de  $p_c \geq 0.65$  para cada valor de  $\sigma$  los resultados muestran el mismo comportamiento pero entre más grande sea el valor de la fuerza de acoplamiento, menor valor promedio tienen el grado promedio y el grado promedio de los vecinos. Para cualquier valor de  $\sigma$  y  $p_c = 0.625$  observe que todos los promedios están casi uno encima del otro, y hacen una clara diferencia entre los dos comportamientos que se observa para estas medidas.

### **7.2.3 Coeficiente de agrupamiento**

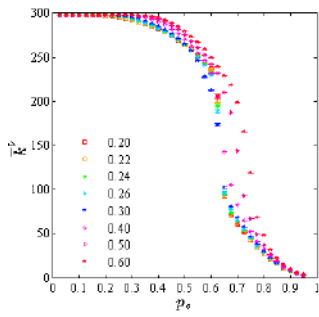
Como se ha mencionado anteriormente, el coeficiente de agrupamiento sirve para cuantificar qué tan bien agrupado está un nodo con sus vecinos. Cuando un nodo está bien agrupado el coeficiente de agrupamiento es máximo, en tanto que si no está bien agrupado esta medida tomara un valor pequeño. Esta medida en la teoría de redes es muy usado para identificar si una red es una red de mundo pequeño, éstas son redes en las cuales la mayoría de los nodos no son vecinos entre sí, sin embargo la mayoría de los nodos pueden ser alcanzados desde cualquier otro nodo a través de un número relativamente pequeño de nodos intermedios, ver Figura 3.2, Watts & Strogatz (1998).



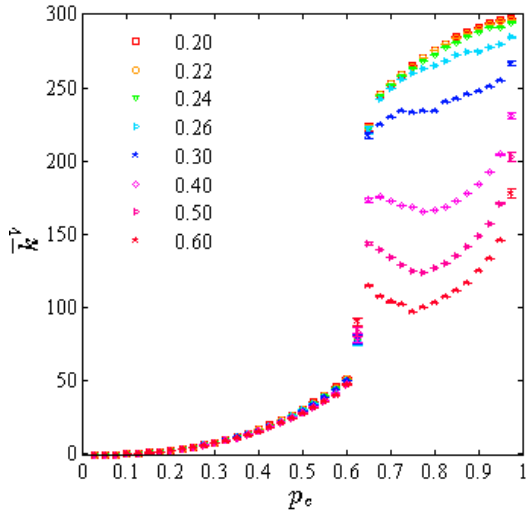
(6a)



(6b) Grado promedio



(6c)



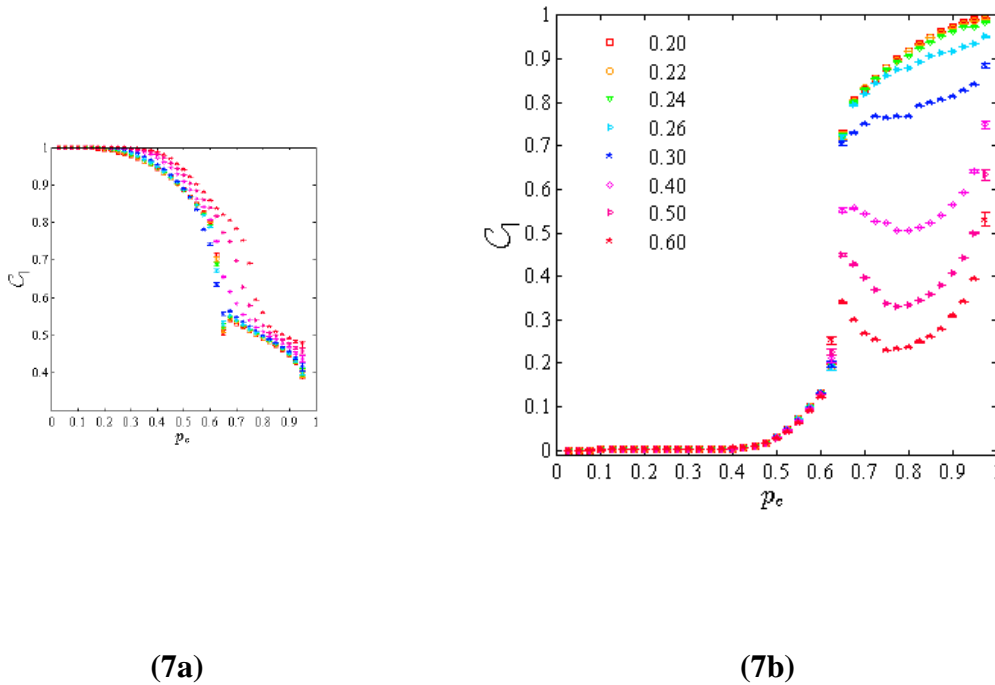
(6d) Grado promedio de los vecinos

**Figura 6:** Resultados obtenidos para el grado promedio de los nodos y el grado promedio de los vecinos de los nodos.

Fuente: Elaboración propia.



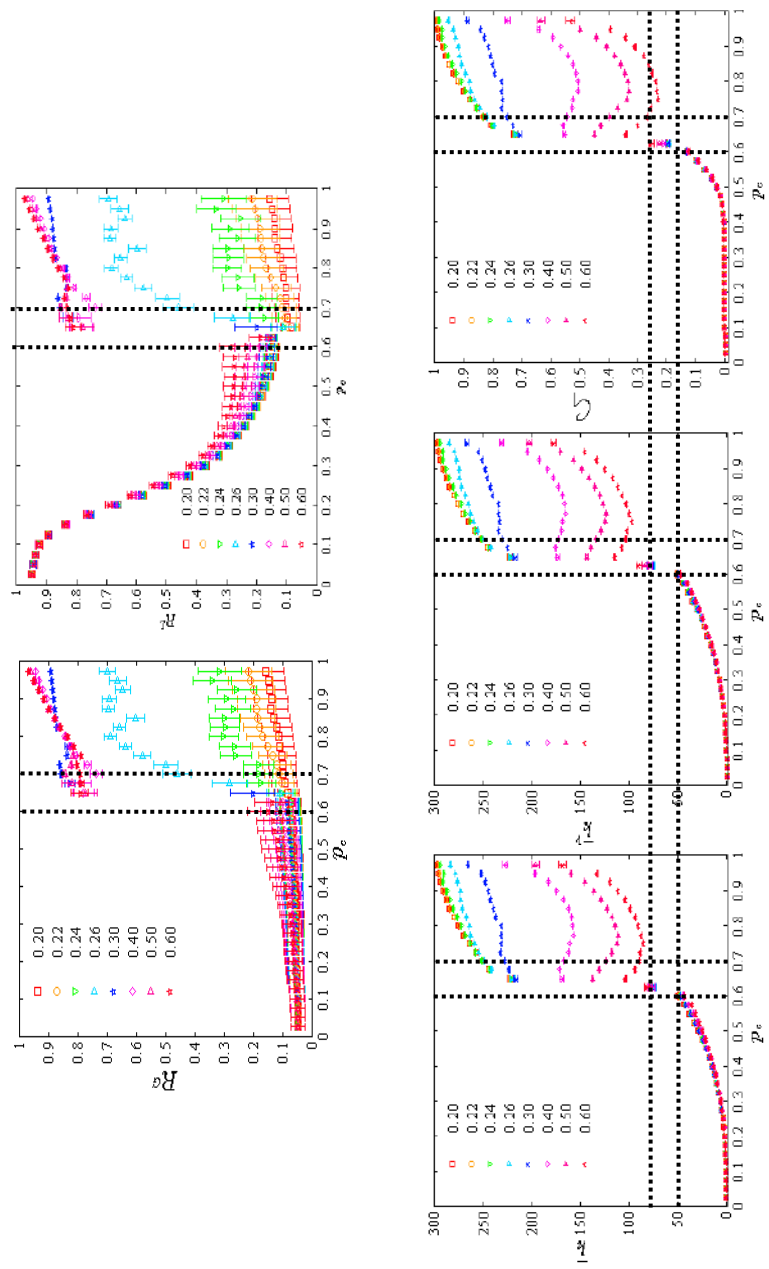
En nuestros resultados (Figura (7b)) se puede observar que para  $p_c \geq 0.65$  y valor de  $\sigma = 0.20, 0.22, 0.24, 0.26, 0.30$  el coeficiente de agrupamiento es relativamente alto, particularmente para los valores más pequeños de  $\sigma$ , aunque esto no es de gran relevancia, pues los valores realmente interesante para analizar son todas las combinaciones entre  $\sigma \geq 0.26$  y  $p_c \geq 0.65$ .



**Figura 7:** Resultados obtenidos para el coeficiente de agrupamiento.

Fuente: Elaboración propia.

En la Figura 8 se muestran en conjunto las gráficas de los resultados de las diferentes medidas para tener una mejor concepción acerca de lo que se comentó para cada medida. Las combinaciones de valores que interesaría estudiar más a fondo son para  $\sigma \geq 0.26$  y  $p_c \geq 0.675$ , dado que lo interesante es analizar bajo qué condiciones que estarían creando redes síncronas y qué características presentan o si se está obteniendo algún tipo de red en particular.



**Figura 8:** Conjunto las gráficas de los resultados de las diferentes medidas.

Fuente: Elaboración propia.

## 8. Conclusiones

Se partió del problema de integración/segregación estudiado desde el punto de vista de las redes complejas por Avalos- Gaytán et al. (2012), considerando que la topología de la red no es estática; sino que existe un mecanismo adaptativo que está actuando sobre los enlaces en la red. En su estudio identificaron bajo qué condiciones ocurre la sincronización en redes y qué propiedades estructurales estén presentes en la topología de la red cuando ocurre la sincronización.

En este trabajo nos planteamos un problema en el que nos preguntamos *qué pasa si en realidad lo que se refuerza son los enlaces que unen nodos que están haciendo lo opuesto, es decir, nodos que tiene comportamientos que no son similares, ¿qué resultados se pueden llegar a obtener?, ¿las redes resultantes seguirán siendo asortativas?, ¿seguirán presentando características estructurales como la modularidad?*

De acuerdo al problema la hipótesis que nos planteamos fue que las redes obtenidas son disasortativas y deben presentar características estructuralmente con comportamientos diferentes.

Con la realización de los tres objetivos que nos planteamos logramos verificar que en efecto las redes que se obtuvieron presentan propiedades tanto dinámicas como estructurales muy diferentes a las obtenidas por Avalos-Gaytán et al (2012). Con esto verificamos la hipótesis que nos planteamos y el objetivo general queda satisfecho, ya que al realizar los tres objetivos específicos se identificaron las características estructurales de las redes al favorecer la conexión de nodos con comportamientos diferentes.

## Referencias

1. V. Avalos. Modelo adaptativo para sincronización en redes modulares (Tesis de doctorado). PISIS- Universidad Autónoma de Nuevo León, 2012.
2. V. Avalos-Gaytán J. A. Almendral, D. Papo, S. E. Schaeffer, and S. Boccaletti. Assortative and modular networks are shaped by adaptive synchronization processes. *Physical Review E*, 86: 015101, (2012).

3. J. A. Acebrón, L. L. Bonilla, C. J. Pérez-Vicente, F. Ritort y R. Spigler. The Kuramoto model: a simple paradigm for synchronization phenomena, *Reviews of Modern Physics*, 77(1):137–185, (2005).
4. V.S. Afraimovich, N. N. Verichev y M. I. Rabinovich. Stochastic synchronization of oscillation in dissipative systems, *Radiophysics and Quantum Electronics*, 29:795–803, (1986).
5. A. Arenas y A. Díaz-Guilera. Synchronization and modularity in complex networks, *The European Physical Journal Special Topics*, 143(1):19–25, (2007).
6. A. Arenas, A. Díaz-Guilera, J. Kurths, Y. Moreno, y C. Zhou. Synchronization in complex networks, *Physics Reports*, 469:93–153, (2008).
7. A. Arenas, A. Díaz-Guilera y C. J. Pérez-Vicente. Synchronization processes in complex networks, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 224(1–2):27–34, (2006).
8. J. T. Ariaratnam y S. Strogatz, Phase diagram for the Winfree model of coupled nonlinear oscillators, *Physical Review Letters*, 86:4278–4281, (2001).
9. A. L. Barabási y R. Albert, Emergence of scaling in random networks, *Science*, 286(5439):509–512, (1999).
10. A. L. Barabási, Z. Oltvai y S. Wuchty. Characteristics of biological networks, en E. Ben-Naim, H. Frauenfelder y Z. Toroczkai (editores), *Complex networks, Lecture Notes in Physics, Tomo 650, Springer Berlin/Heidelberg*. 443–457, (2004).
11. L. Barabási y Z. N. Oltvai. Network biology: understanding the cells' functional organization, *Nature Reviews Genetics*, 5(2):101–113, (2004).
12. E. Barreto y P. So. Mechanisms for the development of unstable dimension variability and the breakdown of shadowing in coupled chaotic systems, *Physical Review Letters*, 85:2490–2493, (2000).
13. E. Barreto, P. So, B. J. Gluckman y S. J. Schiff. From generalized synchrony to topological decoherence: emergent sets in coupled chaotic systems, *Physical Review Letters*, 84:1689–1692, (2000).
14. S. Boccaletti, J. Kurths, G. Osipov, D. L. Valladares y C. S. Zhou. The synchronization of chaotic systems, *Physics Reports*, 366(1–2):1–101, (2002).
15. S. Boccaletti, V. Latora, Y. Moreno, M. Chávez y D. U. Hwang. Complex networks: Structure and dynamics, *Physics Reports*, 424(4–5):175–308, (2006).

16. S. Boccaletti, L. M. Pecora y A. Pelaez. Unifying framework for synchronization of coupled dynamical systems, *Physical Review E*, 63:066 219, (2001).
17. S. Boccaletti y D. L. Valladares. Characterization of intermittent lag synchronization, *Physical Review E Statistical Physics Plasmas Fluids And Related Interdisciplinary Topics*, 62(5 Pt B):7497–500, (2000).
18. S. Boccaletti, D. L. Valladares, J. Kurths, D. Maza y H. Mancini. Synchronization of chaotic structurally nonequivalent systems , *Physical Review E*, 61:3712–3715, (2000).
19. D. R. Chialvo. Critical brain networks, *Physica A*, 340(4):756–765, (2004).
20. R. Femat y G. Solís-Perales. On the chaos synchronization phenomena, *Physics Letters A*, 262(1):50–60, (1999).
21. P. M. Gade y C.-K. Hu. Synchronous chaos in coupled map lattices with smallworld interactions, *Physical Review E*, 62:6409–6413, (2000).
22. F. H. Hirokazu y T. Yamada. Stability theory of synchronized motion in coupled–systems, *Progress of Theoretical Physics*, 69(1):32–47, (1983).
23. H. Hong, M. Y. Choi y B. J. Kim. Synchronization on small-world networks, *Physical Review E*, 65:026 139, (2000).
24. J. Jost y M. P. Joy. Spectral properties and synchronization in coupled map lattices, *Physical Review E*, 65:016 201, (2001).
25. L. Kocarev y U. Parlitz. Generalized synchronization, predictability, and equivalence of unidirectionally coupled dynamical systems , *Physical Review Letters*, 76:1816–1819, (1996).
26. Y. Kuramoto. Self–entrainment of a population of coupled nonlinear oscillators, en H. Araki (editor), International symposium on mathematical problems in theoretical physics, Tomo 39, Springer, New York, NY, USA, págs. 420–422, (1975).
27. Y. Kuramoto. Chemical oscillations, waves and turbulence, *Springer Berlin*, Berlin. (1984).
28. O. Kwon y H.-T. Moon. Coherence resonance in small-world networks of excitable cells, *Physics Letters A*, 298(5-6):319 – 324, (2002).
29. L. Lago-Fernández, R. Huerta, F. Corbacho y J. A. Sigüenza. Fast response and temporal coherent oscillations in small–world networks, *Physical Review Letters*, 84: 2758–2761, (2000).

30. A. M. Uhrmacher y D. Weyns. Multi-agent systems: simulation and applications (Computational Analysis, Synthesis, and Design of Dynamic Systems), CRC Press. (2009)
31. M. E. J. Newman. Modularity and community structure in networks, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 103(23):8577–8582, (2006).
32. E. Niebur, H. G. Schuster, D. M. Kammen y C. Koch. Oscillator-phase coupling for different two-dimensional network connectivities, *Physical Review A*, 44(10):6895, (1991).
33. T. Nishikawa, A. E. Motter, Y.-C. Lai y F. C. Hoppensteadt. Heterogeneity in oscillator networks: are smaller worlds easier to synchronize?, *Physical Review Letters*, 91:014 101, (2003).
34. L. M. Pecora y T. L. Carroll, Synchronization in chaotic systems, *Physical Review Letters*, 64:821–824, (1990).
35. L. M. Pecora y T. L. Carroll. Master stability functions for synchronized coupled systems, *Physical Review Letters*, 80(10):2109–2112, (1998).
36. J. G. Restrepo, B. R. Hunt y E. Ott. The onset of synchronization in large networks of coupled oscillators, *Physical Review E*, 71(3):036 151, (2005).
37. E. Rosa, E. Ott y M. H. Hess. Transition to phase synchronization of chaos, *Physical Review Letters*, 80(8):1642–1645, (1998).
38. M. G. Rosenblum, A. S. Pikovsky y J. Kurths. Phase Synchronization of Chaotic Oscillators, *Physical Review Letters*, 76(11):1804–1807, (1996).
39. M. G. Rosenblum, A. S. Pikovsky y J. Kurths. From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators, *Physical Review Letters*, 78:4193–4196, (1997).
40. N. F. Rulkov, M. M. Sushchik, L. S. Tsimring y H. D. I. Abarbanel. Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems, *Physical Review E*, 51:980–994, (1995).
41. S. Strogatz. From Kuramoto to Crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 143(1–4):1–20, (2000).
42. S. Strogatz. SYNC: the emerging science of spontaneous order, (Hyperion, New York), (2003).

43. S. Strogatz y R. E. Mirollo. Collective synchronization in lattices of nonlinear oscillators with randomness, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 21(13):L699–L705, (1988)
44. J. Travers y S. Milgram. An experimental study of the small world problem, *Sociometry*, 32(4):425–443, (1969).
45. D. J. Watts y S. Strogatz. Collective dynamics of “small–world” networks, *Nature*, 393(6684):440–442, (1998).
46. A. T. Winfree. The geometry of biological time, *Interdisciplinary Applied Mathematics*, Tomo 12, segunda edición, Springer–Verlag, New York, (2001).
47. T. Winfree. Biological rhythms and the behavior of populations of coupled oscillators, *Journal of Theoretical Biology*, 16(1):15–42, (1967).
48. M. A. Zaks, E. H. Park, M. G. Rosenblum y J. Kurths. Alternating locking ratios in imperfect phase synchronization, *Physical Review Letters*, 82:4228– 423, (1999).